Taller de preparación OME

Universidad de Sevilla — 2020

Geometría

1. Encuentra un polígono y un punto en su interior desde el cual no se vea ningún lado por completo.

2. Sea $ABCD$ un rectángulo. Encontrar el conjunto de puntos X que cumplen $AX+BX = CX+DX$.

3. Sea P un punto en la circunferencia ω distinto a su centro O. Determina el conjunto de puntos determinado por los puntos medios de las cuerdas que pasan por P.

4. El paralelogramo de Varignon. Sea $ABCD$ un cuadrilatero y sean K, L, M, N los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente.
   (a) Demostrar que $KLMN$ es un paralelograma
   (b) Sean P, Q los puntos medios de las diagonales AC, BD, respectivamente. Demostrar que $PLQN$ y $PKQM$ son también paralelogramas. Además, comparten el mismo centro.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales perpendiculares inscrito en una circunferencia ω de radio R. Demostrar que:
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$$

6. Sea I el incentro del triángulo ABC. Demostrar que:
$$\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ca} + \frac{CI^2}{ab} = 1$$

7. Sea M un punto en el interior del triángulo ABC tal que:
$$AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB = 4[ABC]$$
   Demostrar que M es el ortocentro del triángulo ABC.

8. En el triángulo ABC consideramos las cevianas concurrentes AP, BQ, CR. El circuncírculo del triángulo PQR interseca a los lados BC, CA, AB por segunda vez en los puntos X, Y, Z, respectivamente. Demostrar que AX, BY, CZ son concurrentes.

9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que:

$$\angle ADB + \angle ACB = 90^\circ \text{ and } \angle DBC + 2\angle DBA = 180^\circ.$$

Demostrar que:

$$(DB + BC)^2 = AD^2 + AC^2.$$

10. Sea ABC tal que $BC = 20$. El incírculo del triángulo interseca a la mediana AD en los puntos E y F de tal forma que:

$$AE = EF = FD$$

Encuentra el área del triángulo.

11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle ADB = \angle BDC$. Supongamos que el punto E en el lado AD satisface la igualdad

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Demostrar que $\angle EBA = \angle DCB$.

12. Sea X un punto en la circunferencia de un cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean E, F, G, y H las proyecciones de X en los segmentos AB, BC, CD, DA, respectivamente. Demostrar que:

$$BE \cdot CF \cdot DG \cdot AH = AE \cdot BF \cdot CG \cdot DH.$$